



TITLE:

楕円曲面のモノドロミー(代数解析学の展望)

AUTHOR(S):

成木, 勇夫

CITATION:

成木, 勇夫. 楕円曲面のモノドロミー(代数解析学の展望). 数理解析研究所講究録 1988, 675: 181-222

ISSUE DATE:

1988-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/100926>

RIGHT:

楕円曲面のモノドロミー

京大数理研 成木勇夫 (Isao Naruki)

序. $K3$ 曲面の族を研究すれば、それは必然的に IV 型領域の幾何と関係する。何故なら周期写像はパラメータ空間から 20 次元 IV 型領域への多価写像になっているからである。そして、この写像のイメージが何であるかを調べることに興味の尽きない問題なのである。特に曲面族が良いものであれば、イナージは低次元の対称領域となるであろう。理論的に一挙に、この 20 次元のパラメータを持つ $K3$ 曲面族を取扱うことが可能ならば理想的なのだが、よく知られているように代数的に方程式を書き下すことのできるものは 19 個のパラメータを持つに過ぎない。この 19 次元族を取扱うことも、その高次元性のため非常に困難が伴う。今まで詳しい研究が可能であった対象が構造が或意味で明確であって具体的に与えることの出来るものに限られているのは、むしろ自然なことであろう。構造が明確であると言うことを正確に言うと、複素 1 次元の代数的サイクルが沢山あると言うことである。 $K3$ 曲面の場合、

このようなサイクルの上での周期積分は零となり無視して
 よく、これが実際よく現れるK3曲面族において、パラメ
 ターの数が減る理由であった。曲面が依存している本質
 的パラメーターは、2次コホモロジー群における、代数的
 サイクルの加群の直交補空間 --- 超越サイクル加群
 と呼ばれる --- 上の周期積分として現れるのである。
 これらは結局、周期写像のイメージの上での座標と言うべ
 きものであるが、周期写像の多価性を統制しているもの
 がモノドロミー群であり、状況が良い場合は最初の曲面
 族のパラメーター空間~~を~~は、周期写像のイメージである低次
 元対称領域のモノドロミー群による商となっている。所
 で、この周期写像^{のイメージも、この}~~も、この~~イメージと元のパラメーター空間と
 のギャップを記述するモノドロミー群も、殆ど超越サイ
 クル加群とその上の交叉形式によって統制されていると言
 っても過言でない。実際、この整二次形式に附随する算
 術的直交群の有限指数の部分群としてモノドロミー群は
 決っている。従って、越超サイクル加群の構造を明かに
 することと、その上の交叉形式を計算することが最重要
 課題となってくる。では、このような計算を可能に
 するデータは何であろうか？ 一般のK3曲面に対して
 この問の解答を与えることは困難であろうが、我々のこ

こでの目的は、考察の対象を $K3$ 楕円曲面に限れば、求められているデータを与えることが出来ることを示すことにある。代数サイクル加群の階数が 5 以上ならば、 $K3$ 曲面は楕円曲面と成ってしまうことが知られているので、この仮定は、当面我々が遭遇するような $K3$ 曲面族に対して一般性を失うことがない。ここで結論を端的に言うと、上に言うデータは、 $K3$ 楕円曲面に対しては、その楕円曲線族としてのモノドロミーであって、これから超越サイクル加群も、その上の交叉形式も計算できるのである。混乱を避けるため、ここで登場した二つのモノドロミーを明確に区別しておかねばならない。我々は $K3$ 楕円曲面族を扱うのであるが、各々の曲面はそれぞれ、楕円曲線の二次元族としてのモノドロミーを持っている。これを以下では楕円モノドロミーと呼ぶ。他方、我々はまたそのような曲面の族を扱っているので、曲面がこの族の中を動くときのモノドロミーをも考察しなければならないのである。こちらには特別の名称は与えない。この二つのモノドロミーが超越サイクル加群上の交叉形式を通して密接に関連し合っていることが、この小論での中心課題なのである。

1. 楕円曲面のトポロジーとモノドロミー。

\mathbb{C} 上のコンパクト非特異曲面 S からコンパクト非特異曲線 Δ 上への projection π が与えられていて、次の条件を満たすとする。

(1) Δ の有限個の点の集合 $\Sigma = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ を除けば、その他の点の π による逆像は非特異楕円曲線である。

(2) π のどのファイバーも第1種例外曲線を含まない。

このような構造の与えられた曲面 S ---- 正確に言うとは (S, π) ---- を楕円曲面と呼ぶ。点集合 Σ については、その各点 p_i の逆像 $F_i := \pi^{-1}(p_i)$ が特異点を持つ曲線であると仮定しても勿論構わない。 F_1, F_2, \dots, F_r は S の特異ファイバーと呼ばれる。序で述べた S 即ち (S, π) のモノドロミーは補集合 $\Delta^* := \Delta - \Sigma$ の1点 p_0 を基点として選べば、準同型

$$\rho: \pi_1(\Delta^*, p_0) \rightarrow \text{Aut}(H^1(\pi^{-1}(p_0), \mathbb{Z}), \langle, \rangle) \cong SL(2, \mathbb{Z})$$

として定まる。但し、 \langle, \rangle は楕円曲線 $\pi^{-1}(p_0)$ 上の交叉

形式である。右辺における同型は $\pi^{-1}(p_0)$ の適当な 1-
 (フホモロジ-の) サイクルを基底として選べば定まる。以下においては、

このような基底の指定も既に行ったとして、 ρ を基本群
 $\pi_1(\Delta^*, p_0)$ から行列群 $SL(2, \mathbb{Z})$ への準同型として
 理解することにする。特異ファイバー F_i も一つ取ったと
 き、それが載っている Δ 上の点 p_i を (時計と反対方向に)
 一周する道は基本群の一つの共役類としてしか定まら
 ない。この共役類の ρ -像を含む $SL(2, \mathbb{Z})$ の共役類
 は、 F_i を回る局所モノドロミーのタイプと呼ばれる。

楕円曲面の概念は、言うまでもなく小平によって導入され、
 特異ファイバーの型、対応する局所モノドロミーのタイプ
 の分類が実行され、それらと曲面の大域的な不変量との関
 連なども完全に明かにされた。以下では、これらの知
 識を全て前提して議論を進める。もちろん、特異ファイバ
 ーの既約成分は全て代数サイクルであり、これらで生成され
 る $H^2(S, \mathbb{Z})$ の部分加群 --- 以下 \mathcal{F} と記す --- の構
 造、特にその上の交叉形式は、預め特異ファイバーのリスト
 があれば、小平の分類より直ちに判るのである。我々
 にとって重要なのは、 \mathcal{F} とその上の交叉形式とは、或る複素
 半単純リー環のルート格子とその上のキリング形式と同型
 となっていることである。(正確に言うと、加群 \mathcal{F} において

個々のファイバー F_i から来る部分 \mathcal{F}_i は、このリー環の単純成分と対応している。) では、 \mathcal{F} に対して相補的部分、即ち \mathcal{F} の $H^2(S, \mathbb{Z})$ における直交補空間は何によって記述されているであろうか、という疑問が生ずる。この相補的部分が何故重要かと言うと、ここに超越サイクル加群が含まれているからである。所で、この相補加群は \mathcal{F} によって、従ってファイブレーション $\pi: S \rightarrow \Delta$ によって決まっている対象であるから、写像 π に対して定義できるルレーのスペクトル系列を使えば計算できる筈のものである。理論を簡単にするため、次の仮定をおく。

(*) S は少なくとも一つの大域切断 (global section) を持つ。即ち $\exists s_0: \Delta \rightarrow S$ such that $\pi \circ s_0 = \text{id}_\Delta$.

このときは $H^2(S, \mathbb{Z})$ の中に、 s_0 の ^(コホモロジー) 類 $[s_0]$ と、一般ファイバーの類 F とで生成される加群 L_0 が決まる。

$$L_0 := \mathbb{Z} \cdot [s_0] + \mathbb{Z} \cdot F$$

この加群上の交叉形式は unimodular なるから、 $H^2(S, \mathbb{Z})$ は L_0 とその直交補空間の和に完全に分解する。

$$H^2(S, \mathbb{Z}) = L_0 + L_0^\perp$$

また $\mathcal{F} \cap L_0 = \mathbb{Z} \cdot F$ であるから, $\check{\mathcal{F}} := \mathcal{F} / \mathbb{Z} \cdot F$ が L_0^\perp に埋め込まれる。また $F^2 = 0$ であるから $\mathbb{Z} \cdot F$ は丁度 \mathcal{F} の radical である。(上で \mathcal{F} 自身が半単純リー環のルート格子と同型であると言ったが, これは間違いで, 正確には $\check{\mathcal{F}}$ のことである。 $\check{\mathcal{F}}$ の単純成分は $\check{\mathcal{F}}_i := \mathcal{F}_i / \mathbb{Z} \cdot F$ である。) このことから, \mathcal{F} 上の交叉形式は $\check{\mathcal{F}}$ の交叉形式を導くが, これは $\check{\mathcal{F}} \hookrightarrow L_0^\perp$ によって導かれたものと一致する。我々は次の部分加群を \mathcal{F} に対する相補的部分と見るのである。

$$\check{\mathcal{F}}^\perp := \check{\mathcal{F}} \text{ の } L_0^\perp \text{ における直交補空間}$$

紙面の関係で詳細を一切省くが, スペクトル系列は次の同型を導く。

$$\check{\mathcal{F}}^\perp \cong E_2^{1,1} = H^1(\Delta, R^1\pi_* \mathbb{Z})$$

制限 $R^1\pi_* \mathbb{Z} |_{\Delta^*}$ は局所定数層であり, これに附随する

モノドロミーが準同型 ρ であった。局所コホモロジーの完全列を使えば、上の同型の右辺は $H^1(\Delta^*, R^1\pi_* \mathbb{Z})$ に埋め込むことができて、しかもそれを準同型 $H^1(\Delta^*, R^1\pi_* \mathbb{Z}) \rightarrow H^2_\Sigma(\Delta, R^1\pi_* \mathbb{Z})$ の核として特徴づけることができる。 Δ^* の普遍被覆は contractible であるから、次の同型がある。

$$H^1(\Delta^*, R^1\pi_* \mathbb{Z}) \cong H^1(\Gamma, L)$$

但し、ここで、右辺は群コホモロジーで $\Gamma := \pi_1(\Delta^*, p_0)$, L は ρ によって Γ -module と見た $H^1(\pi^{-1}(p_0), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$ のことである。こうして、 $H^1(\Delta^*, R^1\pi_* \mathbb{Z})$ は 横断モノドロミー ρ による代数的記述を持つことが判った。他方、 $H^2_\Sigma(\Delta^*, R^1\pi_* \mathbb{Z})$ は上の完全列を局所化すれば加群 $\bigoplus L / (\gamma_i - 1)L$ と同型であることが判る。ここで γ_i は p_i を回る適当な道の基本群における類とする。上の準同型はコサイクルの制限によって得られるので結局次の同型が得られたことになる。

$$\tilde{\mathcal{F}}^\perp \cong \bar{H}^1(\Gamma, L) := \bar{Z}^1(\Gamma, L) / B^1(\Gamma, L)$$

ここで $B^1(\Gamma, L)$ は L に係数を持つ 1 次 Γ -コバウンダリー空間であって $\bar{Z}^1(\Gamma, L)$ は次のように定義される。

$$\bar{Z}^1(\Gamma, L) := \left\{ c \in Z^1(\Gamma, L); c(\gamma_i) \in (\gamma_i - 1)L \right. \\ \left. i = 1, 2, \dots, \Gamma \right\}$$

$Z^1(\Gamma, L)$ は同様の Γ -コサイクルの空間である。

$\bar{H}^1(\Gamma, L)$ を境界条件付 1-コホモロジー群と呼ぶ。

2. $\check{Z}^1 \cong \bar{H}^1(\Gamma, L)$ 上の交叉形式。

第一節の議論によって相補加群 \check{Z}^1 の楕円モノドロミによる記述が可能となった。しかしこれは堆加群として決ったのであり、この上の交叉形式が何であるか判った訳ではない。ここでは詳細な議論を一切省いて、交叉形式の代数的記述のみを与える。(成木 [7] を参照) 先ず、

$\langle, \rangle : L \times L \rightarrow \mathbb{Z}$ から決まる普通の cup 積

$H^1(\Gamma, L) \times H^1(\Gamma, L) \rightarrow H^2(\Gamma, \mathbb{Z})$ がどのように定まっているか反省する (Cartan-Eilenberg [1])。コサイクル $a, b \in Z^1(\Gamma, L)$ に対して、それらのクラスの積を表すコサイクル $a \cap b$ は次式で与えられる。

$$(a \cap b)(x, y) := \langle a(x), x b(y) \rangle \quad x, y \in \Gamma$$

今の場合 $H^2(\Gamma, \mathbb{Z}) = 0$ ($\because S$ は少くとも一つの特異ファイバーを持つとしているから Γ は自由群) であるから $a \cap b$ は \mathbb{Z} 係数 2-コバウンダリーでなければならぬ。即ち写像 $d: \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$ があって

$$(a \cap b)(x, y) = d(x) + d(y) - d(xy)$$

と書ける。このような写像 d の ambiguity は $\text{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\Gamma/[\Gamma, \Gamma], \mathbb{Z})$ であるので、次の和は d の取方に依存しない。

$$S(a, b) := - \sum_{i=1}^r d(\gamma_i)$$

ここで γ_i は F_i に対応する局所モノドロミーの代表元であった。当然のことながら、次の疑問が生ずる。

$S(a, b)$ は確かに a, b に関して双線型であるけれど、果して代表系 $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r\}$ の取方に依存していないのだろうか、或は、この和は a, b のコホモロジー類によって決まっているのだろうか？ これらに対する答は勿論ノーである。従って我々は $-d(\gamma_i)$ に対して何らかの補正項

を要するのであるが、この補正項が前節でコサイクルに課した境界条件 $a(\gamma_i), b(\gamma_i) \in (\gamma_i - 1)L$ より出て来るのである。即ち、各 $i = 1, 2, \dots, r$ に対して、

$$a(\gamma_i) = (\gamma_i - 1) a_i \quad b(\gamma_i) = (\gamma_i - 1) b_i$$

が成立つような $a_i, b_i \in L$ が存在するのであるが、これを使って我々は

$$\Delta(\gamma_i) := \langle a_i, b(\gamma_i) \rangle = \langle a(\gamma_i^{-1}), b_i \rangle$$

と置く。これが a_i, b_i の取方に寄らないことは、第二の等号から明かである。こうすると差 $\Delta(\gamma_i) - d(\gamma_i)$ は γ_i をその任意の共役で置き換えても変らない量となるのである。

$$\Delta(x\gamma_i x^{-1}) - d(x\gamma_i x^{-1}) = \Delta(\gamma_i) - d(\gamma_i)$$

よって

$$\tilde{I}(a, b) := \sum_{i=1}^r (\Delta(\gamma_i) - d(\gamma_i))$$

とかくと、これは a, b に関して対称且双線形であり、
 a 又は b が $B^1(\Gamma, L)$ に属するとき 0 となることも証明されるのである。

命題 2.1. $\bar{Z}^1(\Gamma, L)$ 上の二次形式 \tilde{I} は $\bar{H}^1(\Gamma, L)$ $\cong \mathcal{F}^L$ 上の二次形式を自然に導く。また \tilde{I}, I は Γ の L 上の表現と、 Γ における $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ の共役類を全体として保存する Γ の自己同型によって不変である。

この命題の第二の主張をもっと明確に定式化する。
 $C(\gamma_i)$ を Γ における γ_i の共役類とする。このとき Γ の自己同型 α が (L, \mathcal{C}) -認容的であるとは、二条件

- (i) $\alpha(x)u = xu \quad (x \in \Gamma, u \in L).$
- (ii) $\exists \sigma: \text{permutation of } \{1, 2, \dots, r\} \text{ such that}$
 $\alpha(C(\gamma_i)) = C(\gamma_{\sigma(i)}).$

が成立つとき言う。ここに \mathcal{C} は順序のついた組
 $(C(\gamma_1), \dots, C(\gamma_r))$ を指すものとする。このような自己同型全体は勿論 $\text{Aut}(\Gamma)$ の部分群である。

$$A(L, \mathcal{C}) := \{ \alpha \in \text{Aut}(\Gamma); \alpha: (L, \mathcal{C})\text{-認容的} \}$$

この群は明かに $\bar{H}^1(\Gamma, L)$ に作用する。(境界条件 $\mathcal{C}(\gamma_i) \in (\gamma_i - 1)L$ は γ_i をその共役に置き換えても変わらないことに注意。) 命題 2.1 はこの $A(L, \mathcal{C})$ から直交群 $\text{Aut}(\bar{H}^1(\Gamma, L), \mathcal{I})$ の中への自然な準同型があることを言っている。所で、二次形式 \mathcal{I} は全く代数的に定義されたのであるが、これがア priori に非退化であると言う保証はない。今の所 Γ -加群 L が、楕円モノドロミーの表現である場合にのみ、 \mathcal{I} は $\check{\mathcal{F}}^\perp$ 上の交叉形式と同一視され、非退化であることが判るのみである。いづれにせよ、我々の目的にはこれで十分なのである。

命題 2.2. 二次形式 \mathcal{I} は $\check{\mathcal{F}}^\perp$ 上の交叉形式と一致する。

最後に、命題 2.1 で述べられた \mathcal{I} の自然性は $\text{rank}_{\mathbb{Z}} \check{\mathcal{F}}^\perp$ が一定であるような楕円曲面族が与えられたとき、その $\check{\mathcal{F}}^\perp$ 上のモノドロミー表現を完全に明かにするものである。実際、幾何学的に、パラメータ空間の基本群から $\text{Aut}(\Gamma)$ への準同型が定まるが、これは

必ず部分群 $A(L, \mathcal{C})$ を経由するからである。こうして、この基本群から算術的直交群 $\text{Aut}(\bar{H}^1(\Gamma, L), I) = \text{Aut}(\check{\mathcal{C}}^L, I)$ への準同型が自然に求められるのである。

3. 有理楕円曲面からの K3 曲面の構成

序で既に述べたように、我々の興味は比較的簡単な K3 曲面の族を^(実際に)与えて、そのパラメータ空間を対称空間の商として記述するということであった。それではどのようにして、そのような曲面族を具体的に構成するか問題になる。ここで提出する方法は、有理楕円曲面族を与えて、その二重被覆であるような K3 楕円曲面の族を考えると言うものである。ファイバー同士が互に対応するようにしたいので、二重被覆を作る際に分岐曲線として二つのファイバーを選ぶと言うのは自然な考えである。即ちここで言う二重被覆とは基底曲線の取換である。S が有理楕円曲面のとき基底曲線 Δ は $P_1(\mathbb{C})$ と同型であるので、 Δ の任意の二点に対して、それらにおいて分岐する二重被覆は常に存在し、それはまた $P_1(\mathbb{C})$ と同型になる。所以有理楕円曲面の幾何は、例外リー代数 E_8 のルート系を通して概観するのが最も妥当であろう。先ずこのことを説明

する。前節で考察された楕円曲面 S は有理曲面であると仮定する。このとき $K^2 = F^2 = 0$ ($K = -F$) 故に
 S のオイラー数は 12 であり、これは特異ファイバーのオイラー数の和に等しい。また、 $H^2(S, \mathbb{Z}) \cong H_2(S, \mathbb{Z})$ は代数的サイクルによって生成され、交叉形式の符号は $(1, 9)$ となる。従って前節で導入した $L_0 = \mathbb{Z} \cdot [S_0] + \mathbb{Z} \cdot F$ の直交補空間 L_0^\perp は \mathbb{Z} 上階数 8 であって、その上の交叉形式は負定値, even, unimodular 即ち E_8 のルート格子 $L(E_8)$ 上のキリング形式と同型である。古典的には既に Kantor, Coble によって知られ、近年 Pinkham, Looijenga 等によって再び取上げられた周期写像の理論は S 及び S の上の一つのファイバー D ----- これは今の
 場合、反標準因子なのであるが ----- を固定し (S, D) のモジュライ^(の記述)を対象とする。もっと正確に言うと、1次元アーベル多様体 E を固定し、同型 $\varepsilon: \text{Pic}(D) \xrightarrow{\sim} E$ が存在するような ~~因子~~ ^{因子}のみを考え、また ε のみならず等長同型 $\alpha: L(E_8) \xrightarrow{\sim} L_0^\perp$ も指定されている対象 $(S, D, \varepsilon, \alpha)$ のモジュライ空間を考えるのである。 $L(E_8) \xrightarrow{\sim} L_0^\perp$ に属する因子を、 D との交点を取ることによって D 上に制限し、更にこれを $\text{Pic}(D)$ の元と見て ε によって E の中に送る。このことによって $(S, D, \varepsilon, \alpha)$ の同型類に対して、アー

バル多様体 $\text{Hom}(L(E_8), E) \cdots E$ の 8 個の直積と
 同型 \cdots の元が一つ定まる。上に挙げた理論の主
 定理は、この対応によって ^{上記のような} フレーム付有理楕円曲面のモジュ
 ライ空間が このアーベル多様体と同一物となることを言
 っているのである。さて、ここで S の特異ファイバーの
 タイプを統制している加群 $\check{\mathcal{A}}$ は 上記準同型 $L(E_8) \cong$
 $L_0^\perp \rightarrow E$ によって零化されることに注意する。実際こ
 れはこの写像の核となっている。又、 $\check{\mathcal{A}}$ は同型 $L(E_8) \cong$
 L_0^\perp によって E_8 の部分ルート系と対応している。 E_8 の
 部分ルート系を固定することと S の特異ファイバーのタ
 イプを決めることが ほぼ 同値なことになるのである。
 有理楕円曲面 S に対して 超 サイクル加群はもちろん零で
 あるけれども、相補加群 $\check{\mathcal{A}}^\perp$ は一般に残っており、
 また上の周期写像の構成から判るように、この加群の階
 群数が 部分ルート系を固定を固定したときの フレーム付
 有理楕円曲面族のパラメーターの数なのである。それでは
 一体この相補的加群 $\check{\mathcal{A}}^\perp$ の幾何学的意味は何かと言
 うと、これは大域切断全体のなす加群 $\cdots S_0$ を零元と
 している。以後切断加群と呼ばれる \cdots に他なら
 ないのである。(正確に言うと、切断加群は商加群
 $H^2(S, \mathbb{Z}) / L_0^\perp / \check{\mathcal{A}}$ に同型であって $\check{\mathcal{A}}^\perp$ はその中で有

限指数である。) 結局、上に述べた Kantor-Coble-Pinkham-Looijenga の理論の主張していることは、
 フレーム付有理楕円曲面は、その上に指定されている因子
 $D \cong \text{Pic}(D) \cong E$ を大域切断が横切る点を並べたもの
 によって決っている、と言う至極おもしろいことだったのであ
 る。このことは、もっとハッキリした形で、最終節の例に即
 して見ることになるであろう。さて第二節では、相補加
 群 $\check{\mathcal{S}}^\perp$ をコホモロジー群 $H^2(S, \mathbb{Z})$ 全体の中で考えた
 のであるが、有理楕円曲面のときは、後者は代数サイクル
 加群と一致している。しかし一般の場合、代数サイクル
 加群は全コホモロジー群と一致しないとしても、それは
 加群 L_0 及び $\check{\mathcal{S}}$ を含んでいる。従って我々は、この
 加群の L_0 に対する相補的部分 ($\subseteq L_0^\perp$) を考えること
 が出来、 $\check{\mathcal{S}}$ はこの中に含まれている。よって我々は、 $\check{\mathcal{S}}$
 の (L_0^\perp 全体ではなく) この相補的部分における直交補空間
 を考えることが出来る。この直交補空間 --- これを \mathcal{S}'
 と書くことにする --- が、一般の場合、切断加群の指数
 有限の部分加群なのである。~~この辺の~~ (切断加群に関する
 このたぐいの命題は本質的に塩田 [10] に負うもの
 である。) 構成の仕方から \mathcal{S}' は $\check{\mathcal{S}}^\perp$ の部分加群で
 ある。そして、 \mathcal{S}' の $\check{\mathcal{S}}^\perp$ における直交補空間 \mathcal{S} が

超越'サイクル加群'なのである。こうして、超越'サイクル加群'の構造が決った。結局、この加群は相補'加群' $\tilde{\pi}_1$ と切断加群とによって本質的に決まると言う主張が得られた。前者は楯田モノドロミーによって決まる。 δ' 或は切断加群の決定は一般には困難を伴うが、初めに言った方法で有理楯田曲面から K3 楯田曲面 ~~を作った~~ を作ったとき、後者の曲面に対しては δ' が定まるのである。我々の二重被覆構成'に、分岐曲線は二つの I 型特異ファイバーである と言う制限を設ける。(このような制限の下では、曲面の依存するパラメーターの数は保たれることに注意。) 詳しい議論は一切省略するが、この仮定の下に、 $\tilde{\pi}_1$ に相当する E_8 の部分ルート系を固定したとき得られる有理楯田曲面族の 一般元 に対しては、二重被覆構成'の際、切断加群の階数は保存される ことが証明される。即ち、被覆 K3 曲面における切断は、有限指数性も無視すれば、元の有理曲面の切断の自然な持ち上げによって尽される、ということが証明されるのである。被覆 K3 曲面の楯田モノドロミーも、元の有理曲面の楯田モノドロミーから、分岐特異ファイバーの指定により、原理的に決っているから、結局 有理楯田曲面の(楯田)モノドロミーのみから、被覆 K3 曲面の

超越サイクル加群と、その上の交叉形式'とが計算可能となったのである。結局、我々は次のような K3 曲面の構成原理に到達した。

(1) $L(E_8)$ の部分ルート系を指定し、 \checkmark 予かこれと同型となるような有理楕円曲面の族を構成する。この族のパラメータ空間の次元は、部分ルート系の余階数に等しい。^{二重被覆の}

(2) この有理曲面族から K3 曲面族を作るため、^{分岐} 曲線として二つの I 型の特異ファイバーを指定する。この指定をするため、パラメータ空間を、その適当な有限被覆で置換える必要があるかも知れない。

(3) こうして出来た K3 楕円曲面族において、超越サイクル加群の階数は最初に固定した部分ルート系の余階数プラス 2 に等しく、その上の交叉形式' ~~は~~ は even, 非退化で、丁度 2 個の正固有値を持つ。

そして、この交叉形式'が有理楕円曲面の楕円モノドロミーから計算されるのである。

4. 有理楕円曲面のモノドロミー.

さて、前節までの議論で、我々は全てが有理楕円曲面の楕円モノドロミー^{の決定}に帰することを見た。この節ではこの課題に従事することにする。最初に、決定の基本

原理となる考えを述べよう。我々は E_8 の部分ルート系を固定することによって特異ファイバーの取合せを決め、対応する有理楕円曲面族を考えたが、楕円モノドロミーは、或る意味の同値性を除いて、族に属する全ての曲面に対して一意的に決っている筈である。従って我々は族の中から“都合の良い”曲面を選んでその楕円モノドロミーを調べればよい。我々は先ず曲面が“実”であることを要求する。モノドロミー決定のもう一つの原理は、この実のカテゴリーの中での“unfolding”である。即ち、楕円曲面のどのように複雑な特異ファイバーも最も簡単な I_1 型のファイバー^{いくつか}が合流して出来たものと考えるのである。実のカテゴリーの中で合流を考えているので、特異ファイバーは一直線に並んでおり、議論は非常に簡単になる。例えば、合流した先の特異ファイバーに対するモノドロミー行列は、そこに集って行く I_1 型ファイバーに附随するモノドロミーを並んでいる順に掛け合せれば求まるのである。このような事情により、 I_1 型ファイバーのみを持つ実曲面の楕円モノドロミーのみを決定すれば、どのような特異ファイバーの合流が可能かは全く算術的に判り、全ての可能な楕円モノドロミーが求められることに

なるのである。さて、ここから、これらのことの厳密な定式化のため、 $\pi: S \rightarrow \Delta \cong P_1(\mathbb{C}): (t_1, t_2)$ を有理楕円曲面とし、これに対して、Weierstrass-Kodaira-Kas の標準形を導入する。

$$y^2 = x^3 - 3p(t)x + 2q(t)$$

ここには、 $p = p(t)$, $q = q(t)$ は夫々 $t = (t_1, t_2)$ の 4 次, 6 次の同次多項式であって、古典的不変量 g_2, g_3 に対応するものである。(S がこの方程式によって楕円曲線の 1 次元族として定義されているのは自明であろう。座標 t の射影変換に応じて x, y も然るべく変換される。この方程式は一般に特異点を持つが、それらは皆有理二重点であって、これらを解消すれば、普通の意味の楕円曲面が得られる。特異点は特異ファイバーに寄与するか、逆は一般に成立たない。) さて S が "実" であるとは、上に導入した p, q が実係数多項式となるような同次座標 $t = (t_1, t_2)$ が存在し、判別式

$$D = D(t) := p(t)^3 - q(t)^2$$

の零点が全て実軸 $P_1(\mathbb{R})$ の上に載っているということとする。又、 S が "generic" であるとは、 $D(t) = 0$ が全て単根のみを持つということとする。~~以下~~以下、有理楕円曲面 S は実且 generic であると仮定する。リーマン球 $P_1(\mathbb{C})$ は $P_1(\mathbb{R})$ によって上下二つの半球に分れるが、例えば " $a_0 = \sqrt{-1}$ を北極" と思い、又 Δ^* の基本群の基点としよう。更に $a_1, a_2, \dots, a_{12} \in P_1(\mathbb{R})$ を判別式 D の零点即ち $F_i = \pi^{-1}(a_i)$ が S の特異ファイバーであるような点とする。又、 a_0 を時計と反対方向に一周するとき a_i はこの順に並んでいるとする。 γ_i ($i=1, 2, \dots, 12$) は a_0 を出発して測地線に沿って a_i に到り、その点を反時計回りに一周して戻って来る道とし、 $\pi_1(\Delta^*, a_0)$ の元であると思う ($\Delta^* := \Delta - \{a_1, a_2, \dots, a_{12}\}$)。又、 M_i を S の楕円モノドロミー $\rho: \pi_1(\Delta^*, a_0) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ による γ_i の像とする。仮定により行列 M_i は全て次と共役である。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

M_i は上半平面 $H = \{ z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Im}(z) > 0 \}$ に作用し、その境界 $P_1(\mathbb{R})$ --- これは Δ の赤道とは区別しなければならない --- の有理点集合 $P_1(\mathbb{Q})$ の中に唯一つの固定点を持つ。 M_i はその固定点によって決まる、即ち、固定点を (p_i, q_i) ($p_i, q_i \in \mathbb{Z}, \gcd(p_i, q_i) = 1$) とすれば、

$$M_i = \begin{pmatrix} 1 - p_i q_i & p_i^2 \\ -q_i^2 & 1 + p_i q_i \end{pmatrix}$$

と書ける。逆に、 $P_1(\mathbb{Q})$ 上の点 $(p_1, q_1), (p_2, q_2), \dots, (p_{12}, q_{12})$ が与えられたとき、上の行列 M_i が等式

$$(4.1) \quad M_1 M_2 \cdots M_{12} = 1$$

を満たしていれば $\pi_1(\Delta^*, a_0)$ の $SL(2, \mathbb{Z})$ の中への表現が決まることになる。それでは $P_1(\mathbb{Q})$ の点 $x_i = (p_i, q_i)$ はどのようにして決まっているのだろうか？この問の答は、楕円モノドロミーの意味を考えると、おのずから与えられる。我々は楕円曲面 S の不変量

$$f(t) := p(t)^3 / D(t)$$

を $\Delta \cong P_1(\mathbb{C}) : t$ 上の有理関数として得るが、これを古典的な楕円モジュラー関数

$$J(\tau) := g_2(\tau)^3 / (g_2(\tau)^3 - 27 g_3(\tau)^2)$$

とを比較することによって 閉上半球 Δ_+^* を 閉上半平面 $H \cup P_1(\mathbb{R})$ に写すことができる。(この際丁度 $\Delta_+^* = \Delta_+ - \{a_1, \dots, a_{12}\}$ が H 内に写される。) 即ち $f(t) = J(\tau(t))$ となるよう $\tau(t)$ を連続的に定める。このとき有理点 x_i は丁度 a_i の像なのである。

f は赤道上実数値を取るのて、 J の性質から 区間 $I_i := [a_i, a_{i+1}]$ の像は或る H の測地線の閉包に含まれる。この測地線は $GL(2, \mathbb{Z})$ の或る鏡映の固定点集合となっている。この鏡映を σ_i と書けば、モノドロミ一行列の表現

$$M_i = \sigma_{i-1} \sigma_i$$

が得られる。但し、ここで添数集合は巡回群 $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

であるということにする。 x_i は測地線 $\text{Fix}(\sigma_{i-1})$, $\text{Fix}(\sigma_i)$ の共通の端点である。 M_i は x_i によって決まってしまうから、 σ_i は σ_{i-1} と x_i とによって決まる。 x_{i+1} は鏡映 σ_i の境界 $P_1(\mathbb{R})$ における二つの固定点のうちのどれかであるが、区間 I_i の像が $\text{Fix}(\sigma_i)$ と一致すれば、それは x_i と異なる方であるし、そうでない場合は x_i と一致する。前者の場合 I_i は“完全”，後者の場合は“不完全”と呼ぶ。結局この議論で、 n 個の区間 $I_1, I_2, \dots, I_{12} = I_0$ のどれが完全で、どれが不完全であるかのデータが与えられていれば σ_i, M_i, x_i は σ_0 とその固定点集合の端点 x_1 とから帰納的に構成されてしまうことが判った。残りは、この初期値を、 $SL(2, \mathbb{Z})$ の作用を除いて、決めることであるが、これは函数不変量 f が開区間 $I_0 = (a_{12}, a_1)$ 上で正值であるか負値であるかによって決まる。この区間の二つの類別は交互に現れるから、 I_0 上で f は正值であると仮定して一般性を失わない。従って我々は、 $x_1 = (1, 0)$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と、この初期値を正規化しておいて支障ない。後は関係式 (4.1) が満たされているかどうかチェックすればよいだけとなる。こうして 実且 generic な有理楕円曲面の楕円モノドロミーが完全に分類される。下に、12個の有理点の組 $(x_1, x_2, \dots, x_{12})$ の10個のパターン B_i ($i=1, 2, \dots, 10$) を挙げる。

$$B_1 \quad (1/0, -1/2, 0/1, -2/3, -1/2, -1/2, -1/2, -1/2, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1)$$

$$B_2 \quad (1/0, -1/2, -1/2, -1/2, -1/3, -1/4, -1/2, -1/2, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1)$$

$$B_3 \quad (1/0, -1/2, 0/1, 0/1, -1/4, -1/3, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1)$$

$$B_4 \quad (1/0, -1/2, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 1/0, -1/2, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1)$$

$$B_5 \quad (1/0, -1/2, -1/2, -1/4, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1)$$

$$B_6 \quad (1/0, -1/2, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 2/1, 1/0, 1/0, 1/0, 1/0)$$

$$B_7 \quad (1/0, -1/2, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 1/0, 1/0, -1/4, -1/4, 0/1, 0/1)$$

$$B_8 \quad (1/0, -1/2, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 0/1, 1/1, 1/1, 1/0, 1/0)$$

$$B_9 \quad (1/0, 1/0, 1/0, 1/0, -2/1, -2/1, -1/1, -1/1, -1/1, -1/1, 0/1, 0/1)$$

$$B_{10} \quad (1/0, 1/0, -1/1, -1/1, 0/1, 0/1, 1/0, 1/0, -1/1, -1/1, 0/1, 0/1)$$

定理 4.1. 実且 generic な有理楕円曲面のモノドロミ一行列 M_1, M_2, \dots, M_{12} は上で述べたように定められているものとし, x_i を M_i の固定点とする。このとき組 $(x_1, x_2, \dots, x_{12})$ は, $SL(2, \mathbb{Z})$ の元の作用と, 巡回置換と変換

$$(x_1, x_2, \dots, x_{12}) \longleftrightarrow (-x_{12}, -x_{11}, \dots, -x_1)$$

とを適当に組合せて作用させることによって, 上に挙げた B_1, B_2, \dots, B_{10} のどれかに変形することができる。

最後に, この定理の変換は, 上下の両半球と取換

る操作に対応し, $SL(2, \mathbb{Z})$ の積の順序を入れ換える自己同型

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$$

に対応していることを注意しておく。又, 行列式が -1 であるような $GL(2, \mathbb{Z})$ の元はそのままでは上半平面を保存しないので, 反正則な変換

$$z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \quad ad - bc = -1$$

として作用するものとしたことを断っておく。

5. 応用例

上で展開した方法がどの位具体的に実行可能なものであるかを示すために, E_8 の部分ルート系 $A_4 + 2A_1$ を取り, これに対して定義される 2 個のパラメータを持つ有理楕円曲面族とそれから二重被覆によって派生する K3 楕円曲面族とを扱って見る。(このような部分

ルート系は E_8 の Weyl 群の作用を除いて一意的。) この部分ルート系に属する一般の有理楕円曲面は A_4 に相当する I_5 型の^{特異}ファイバー --- I_5 --- と $2A_1$ に相当する 2 個の I_2 型特異ファイバー --- I_2', I_2'' --- と、オイラー数の残りを埋める分だけ、即ち 3 個の I_1 型特異ファイバー --- I_1', I_1'', I_1''' --- とを持っている。(上で特に注意しなかったが、 I_1 型と II 型の特異ファイバーは既約であって、一般ファイバーのクラス F を法として考える時ファイバー加群 \mathcal{F} に何の影響もしない。従って部分ルート系 $\mathcal{F} \subseteq L(E_8)$ には、全然影響を与えない。これらは常にオイラー数の残部と考えられるべきものである。) このような曲面の楕円モノドロミーは前節で与えられたパターン B_6 より派生する: B_6 における有理点 x_1, x_2, \dots, x_{12} を固定点として持つ I_1 型行列を M_1, M_2, \dots, M_{12} とし、

$$M(I_5) := M_3 M_4 M_5 M_6 M_7$$

$$M(I_1') := M_8$$

$$M(I_2') := M_9 M_{10}$$

$$M(I_2'') := M_{11} - M_{12}$$

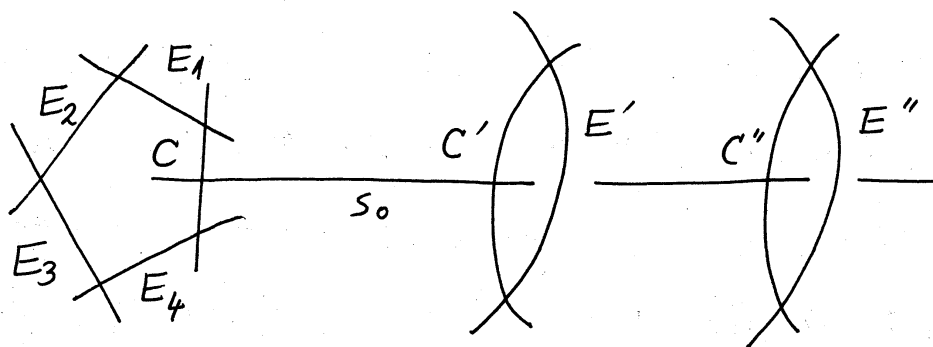
$$M(I_1'') := M_1$$

$$M(I_1''') := M_2$$

と置くと、これらが丁度夫々の型の特異ファイバーに対するモノドロミ—行列となっている実有理楕円曲面が存在するのである。即ち B_6 はこの楕円曲面のモノドロミ—に対して *unfolding* になっていると云うことである。(上の表示の右辺の積に現れる個々の行列は互に可換である。このことは特異ファイバーの合流先が I 型であるときは常に起る(成木[5]).)

こうして楕円モノドロミ—が完全に決ったから、後は、分岐特異ファイバーを指定すれば、二重被覆として派生する $K3$ 曲面の超越サイクル加群とその上の交叉形式とか自動的に計算できる。しかしこれについては後に結果だけ述べることにして、今は暫時、第3節で説明した考えに基づいて、この~~部~~部分ルート系に属する有理楕円曲面の依存している標準的パラ

メターを求めて見よう。先づ一個の大域切断 s_0 を固定し、これが I_5, I_2', I_2'' と交わるときの夫々の既約成分を C, C', C'' と書く。残りの既約成分を大文字 E を使って図のように番号付ける。



このとき、これらの既約成分と次のような交わり方をする大域切断 s', s'', s''' が一意的に存在する。

$$s' \propto \{E_3, C', E''\}$$

$$s''' \propto \{E_3, C', C''\}$$

$$s'' \propto \{E_3, E', C''\}$$

ここで $A \propto B$ は曲線 A と B が交わることを意味する。

さて我々はモジュライのパラメターを得るために、 I_1 型の特異ファイバー I_1''' を選んで、その非特異部分 $(I_1''')^*$ から \mathbb{C}^* 上への同型 ε を交点 $s_0 \cap I_1'''$ が丁度 $1 \in \mathbb{C}^*$

が対応するように取る。更に交点 $S' \cap I_1'', S'' \cap I_1''$ の ε による像を $s, t \in \mathbb{C}^*$ とすれば、この s, t の組 (s, t) が、部分ルート系 $A_4 + 2A_1$ に属する有理楕円曲面族の標準的パラメータなのである。(交点 $S''' \cap I_1''$ の ε による像は $(st)^{-2}$ となる。) ここで、我々はこの (s, t) によっては残りの二つの I_1 型特異ファイバーを区別することが出来ないことを注意しておかねばならない。このことは、もし我々がこのタイプの有理曲面族に対して、今選ばれた I_1'' とそう一つの I_1 型ファイバー、例えば、 I_1' とで“分岐する = 重被覆を構成しよう”と思うならば、考慮すべき微妙な問題となるのである。 I_1', I_2'' を明確に区別するために、我々は (s, t) -空間の $\sqrt{\text{次の二重被覆}}$ を取る。

$$x^2 = \frac{5(st+1) + 4(s+t)}{st+1}$$

(s, t) に x を加えた空間の上で曲面族を考えてもよいが、これでは二重被覆構成に不必要な情報も含まれていて扱いが面倒になり過ぎる。例えば、 ε を ε^{-1} に置き換えることは $(s, t) \longleftrightarrow (s^{-1}, t^{-1})$ に対応しているし、 I_2' と I_2'' を入れ換えることは $(s, t) \longleftrightarrow (t, s)$ に対応し

ている。このような余分な情報を落とすため、我々は

$$y = \frac{(st)^2 + 1}{st}$$

と置く。こうすると、 I_1', I_1'' が分岐するところが重複被覆としての K3 曲面族は、結局 (x, y) -平面上に定義されていると思っておいいことが判る。この K3 曲面族の (x, y) -平面上的判別集合 --- ファイバー加群序の階数のあがる点集合 --- を求めると、それは1つの円錐曲線 \mathbb{Q} と 6本の直線 L_1, L_2, \dots, L_6 と 1つの 5次曲線 C とから成立っている。

$$\mathbb{Q}: x^2 - xy - 2y + 1 = 0$$

$$L_1: x - 2y + 1 = 0$$

$$L_2: x + 1 = 0$$

$$L_3: x - 3 = 0$$

$$L_4: y - 2 = 0$$

$$L_5: y + 2 = 0$$

$$C: (x^2 - 5)^2 (y^2 + 2)^2 - 64 = 0$$

但し、パラメタ-空間は $P_2(\mathbb{C})$ とし、 (x, y) はその非同次座

標, L_6 は無限遠直線と考える。ここで, L_3 を除いて、残りの曲線の合併を考え、これを D で表す。 D は 12 次曲線である。この曲線を考える理由は、我々の K3 曲面族に対する周期写像は D に沿って、その像 --- 今の場合、2 次元 IV 型領域 $H \times H$ --- の直積構造から来る二つのフォリエイションを入れ換えるからである。このような入れ換えを消去するため、 $P(\mathbb{C}) : (x, y)$ の D で分岐する二重被覆 --- B と書く --- を作る。 B は有理的でないのて、これに適当な座標を与えることは止めることにするが、 B の最小特異点解消 \hat{B} における例外集合及び上記 8 曲線の逆像の固有変換の交わり方を完全に記述することが出来る。12 次曲線 D の特異点のうち、対応する B の特異点が有理二重点でないのは、次の 4 点のみである。

$$p_1 := (-1, 2, 1)$$

$$p_2 := (1, 0, 1)$$

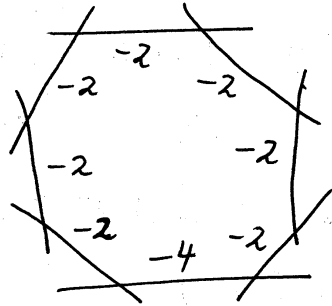
$$p_3 := (0, 1, 0)$$

$$p_4 := (3, 2, 1)$$

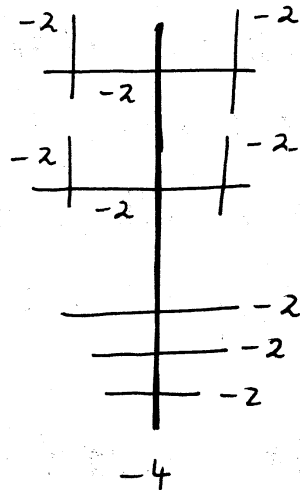
ここで、 (ξ, η, ς) は $P_2(\mathbb{C})$ の同次座標である： $x = \xi/5$,

$y = \eta/\xi$. p_1 及び p_2 上の例外集合は有理曲線のサイクルであって、全く同じ形をしている:

S :



これは尖点 (cusp) 型の特異性であり、コンパクト化より生ずるものである。 p_3 上の例外集合は有理曲線の tree であって、



なる形をしているが、直中の太線に沿っては周期写像の分岐は起らない。残りの曲線は、2個の A_3 型と、

3個の A_1 型例外集合を与える。 p_4 上の例外集合は自己交点数 -2 の楕円曲線^円であって、これに沿ってモノドロミ写像の分岐は起っていない。 D の残りの特異点からは \hat{B} 上の10個の A_1 型例外集合と、2個の A_3 型例外集合を与える。また、 D のうちに含まれていない直線 L_3 の固有変換は自己交点数 -2 の有理曲線であって、これもまた A_1 型の例外集合と見なせる。結局 \hat{B} 上に互に交わらない14個の A_1 型例外集合と4個の A_3 型例外集合と2個の尖点型例外集合とが得られたことになる。そこで、 \hat{B} からこの尖点型集合を取除き、残りの有理二重点型例外集合を夫々1点に blow down したものを \check{B} とすると、これは最早コンパクトではないが商型特異点ばかり持っている。この \check{B} が、領域 $H \times H$ のモノドロミ^群 ~~族~~による商となるのである。(実際、上に与えたデータによって、 \check{B} に対する拡張された意味での chern numbers の proportionality が成立っていることが直に確かめられる。)

最後に、この K3 曲面族に附随するモノドロミ^群を記述してこの小論を終えることとする。この節の始めに、元の有理楕円曲面族に対してモノドロミ一行列 $M(I_5)$, $M(I_2')$, $M(I_2'')$, $M(I_1')$, $M(I_1'')$, $M(I_1''')$ を与えた。

我々は K3 曲面を作るための分岐ファイバー I_1' , I_1'' を既に指定したから, この K3 曲面の超越サイクル加群 --- \mathcal{A} と書く --- とその上の交叉形式とを計算する全ての情報を持っていると言ってよい。途中の詳しい計算は一切省くことにする。 \mathcal{A} を決めるため, 天下りに, 次のような数論的対象を導入する:

$$K := \mathbb{Q}(\sqrt{5})$$

$$\mathcal{O}_0 := \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot (\sqrt{5}+1)/2$$

$$\mathcal{O} := \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \sqrt{5}$$

$$\mathcal{O}' := \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot (2\sqrt{5})$$

\mathcal{O}_0 は実二次体 K の主環, $\mathcal{O} \supset \mathcal{O}'$ は \mathcal{O}_0 中夫々指数 2, 4 の orders である。又, \mathcal{H} を \mathcal{O} に係数を持つエルミット行列の作る加群とする, 即ち

$$\mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \delta \end{pmatrix}; \quad \alpha, \delta \in \mathbb{Z} \quad \beta \in \mathcal{O} \right\}.$$

但し, $\bar{\beta}$ は β の共役元を指すものとする。 \mathcal{H} は \mathbb{Z} 上階数 4 の加群であって, 行列式関数 \det はその上

の整二次形式である。 \mathcal{H} の有限指数の部分加群 $\check{\mathcal{H}}$ とその上の整二次形式 q を次のように導入する:

$$\check{\mathcal{H}} := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{H} ; 2\alpha + \delta \equiv 0 \pmod{4} \right\}$$

$$q := 2 \det | \check{\mathcal{H}} .$$

命題 5.1. 格子 $(\check{\mathcal{H}}, q)$ は、交叉形式による格子 \mathcal{J} と同型である。

これによって, (x, y) -平面上の K3 曲面族の \mathcal{J} 上表現されたモノドロミー群は, 算術的直交群 $O(\check{\mathcal{H}}, q)$ の有限指数の部分群であることは判ったが, これと完全に一致する訳ではない。モノドロミー群の正確な記述を与えるために, 先ず, $SL_2(\mathcal{O}) \ni A$ は \mathcal{H} 上に等長自己同型として作用することに注意する:

$$\mathcal{H} \ni Y \longmapsto AYA^* \in \mathcal{H} \quad (A^* := \overline{{}^t A}).$$

次に $SL_2(\mathcal{O})$ の有限指数の部分群 G_1 を導入する:

$$G_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2c' & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}) ; \begin{array}{l} c' \in \mathcal{O} \\ a \equiv d \pmod{2\mathcal{O}} \\ ab + c'd \in \mathcal{O}' \end{array} \right\}$$

定義より直ちに G_1 の \mathcal{H} 上の作用は格子 $\check{\mathcal{H}}$ を自身に写すことが判る。即ち $G_1 \hookrightarrow O(\check{\mathcal{H}}, q)$ 。 G_1 は全モノドロミー群の中で指数 2 の部分群である。全群を得るために、行列式' = 2 の行列

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

を導入する。この M は $H \times H$ を自身に写し、又、群 G_1 の $GL(2, K)$ における正規化群に属する。 M に対して $O(\check{\mathcal{H}}, q)$ の元 $[M]$ が次の写像として定まる：

$$\check{\mathcal{H}} \ni Y \longmapsto \frac{MYM^*}{2} = MYM^{-1} \in \check{\mathcal{H}}.$$

直交群 $O(\check{\mathcal{H}}, q)$ の中で、 G_1 の像と $[M]$ とで生成された群を G と書く：

$$G := \langle G_1, [M] \rangle.$$

命題 5.2. G は 等長同型 $\check{\mathcal{H}} \cong \mathcal{I}$ を通して,
 (x, y) -平面上の K3 曲面族のモノドロミ一群と一致
する。

2次元 IV 型領域 $H \times H$ は

$$\left\{ x \in \check{\mathcal{H}}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} ; \begin{array}{l} g(x) = 0 \\ , g(x, \bar{x}) > 0 \end{array} \right\} / \mathbb{C}^* \quad (\bar{x} \text{ は } x \text{ の複素共役})$$

の適当な連結成分と同一視され, G の $H \times H$ 上の通常的作用は, それの $\check{\mathcal{H}}$ 上の作用から導かれたものと一致する。
 また, この節の前半で構成した商特異点を持つ非コンパクト面 \check{B} は商空間 $H \times H / G$ と同型になる。
 \check{B} は丁度 2 個の尖点によってコンパクト化されたが, これらは orbit space $P_1(K)/G$ と対応する。結局, 我々の幾何学によって $\# P_1(K) / \overbrace{G}^{=2}$ が証明されたことになるが, これは勿論数論的にも証明できる。 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ の数類は 1 であるから 先ず $\# P_1(K) / SL_2(\mathcal{O}_0) = 1$ が成立ち, 他方包含 $\Gamma(4) \subseteq G_1 \subseteq SL_2(\mathcal{O}_0)$ ($\Gamma(4)$ はイデアル $4\mathcal{O}_0$ による主合同群) があるので, 問題は有限幾何に帰する。 $\# P_1(K) / G_1 = 4$ で,

$P_1(K)/G_1$ の代表元として $p_1 := (1:0)$, $p_1' := (0:1)$,
 $p_2 := (\sqrt{5}+1:2)$, $p_2' := (-1:\sqrt{5}+1)$ を取ることができ
 るが, p_i と p_i' は行列 M の作用で移り合ってしまうの
 である。もちろん, G の射影化における位数 2 或は
 4 の精田元の共役類の数も数論的に計算できる
 のであるが, これらは \check{B} 上の A_1 型或は A_3 型の特異点
 の数と完全に一致するのである。我々は, この例を通
 じて, 数論と代数幾何の交錯する場をほんの少し
 垣間見たのであった。

文 献

- [1] Cartan-Eilenberg, Homological Algebra,
Princeton Univ. Press, 1956.
- [2] Kodaira, K., On compact analytic surfaces I-III,
Ann. of Math., 71 (1960) 111-152, 77 (1963)
563-626, 78 (1963) 1-40.
- [3] Demazure, Pinkham and others, Seminaire sur
les Singularités des Surface, Springer L. N.,
777 (1980), Berlin-Heidelberg-New York.

- [4] Looijenga, E., Rational surfaces with an anticanonical cycle, *Ann. of Math.* (2), 114 (1981), 267-322.
- [5] Naruki, I., On confluence of singular fibers in elliptic fibrations, *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, 23 (1987), 409-431.
- [6] Naruki, I., K3 surfaces related to root systems in E_8 , to appear in *Prospects of Algebraic Analysis*, Academic Press.
- [7] Naruki, I., On the intersection form for curve-fibrations over curves, *RIMS Preprint* 610, 1988.
- [8] Prestel, A., Die elliptischen Fixpunkte der Hilbertschen Modulgruppen, *Math. Annalen* 177 (1968), 181-209.
- [9] Prestel, A., Die Fixpunkte der symmetrischen Hilbertschen Modulgruppe zu einem reell-quadratischen Zahlkörper mit Primzahl diskriminante, *Math. Annalen* 200 (1973), 123-139.
- [10] Shioda, T., On elliptic modular surfaces, *J. Math. Soc. Japan* 25 (1972), 20-59.